www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Toutes les fonctions considérées dans le problème sont à valeurs réelles.
Les parties **I** et **II** sont indépendantes.

Durée : 4 heures

I

λ, μ désignent des réels > 0 .

1. (a) Déterminer les solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $\qquad y'' - y' + \lambda y = 0$

   (b) En déduire les solutions, sur $]-\infty, 1[$, de l'équation différentielle

   $$(E_\lambda) \qquad y'' + \lambda(1-x)^{-2} y = 0$$

   (On pourra poser $x = 1 - e^t$).

   (c) Déterminer la solution u, sur $]-1, 1[$, de l'équation différentielle

   $$y'' + \frac{1}{4}(1-|x|)^{-2} y = 0 \qquad \text{vérifiant} \qquad u(0) = 1 \text{ et } u'(0) = 0.$$

   Montrer

   $$\forall x \in]-1, 1[\qquad u(x) > 0.$$

   (d) Soit $\lambda > \frac{1}{4}$ et v une solution non identiquement nulle de (E_λ). Montrer qu'il existe a, b avec

   $$0 < a < b < 1, \qquad \forall x \in]a, b[\qquad v(x) > 0, \qquad v(a) = v(b) = 0.$$

2. (a) On supose que ϕ est une fonction de classe C^2 sur $]-1, 1[$ vérifiant

   $$\forall x \in]-1, 1[\qquad \phi(x) > 0 \quad \text{et} \quad \phi''(x) + \mu(1-|x|)^{-2}\phi(x) \leq 0.$$

   Soit $\lambda > \frac{1}{4}$ et v, a, b comme dans 1d. Montrer $\qquad \displaystyle\int_a^b v(x)\phi''(x)dx \geq -\lambda \int_a^b (1-x)^{-2} v(x)\phi(x)dx$

   et en déduire $\qquad \mu \leq \lambda.$

   (b) Déterminer

   $$\max \left\{ \inf_{x \in]-1,1[} \left(-(1-|x|)^2 \frac{h''(x)}{h(x)} \right) ; \begin{array}{l} h \text{ de classe } C^2 \text{ sur }]-1,1[\\ \text{et } \forall x \in]-1,1[\quad h(x) > 0 \end{array} \right\}$$

   (On rappelle que le maximum d'une partie P de $\mathbb{R}$ est un majorant de P appartenant à P).

3. (a) On suppose que ψ est une fonction de classe C^2 sur $]0, 1[$ vérifiant

   $$\forall x \in]0, 1[\qquad \psi(x) > 0 \quad \text{et} \quad \psi''(x) + x^{-1}\psi'(x) + \mu(1-x)^{-2}\psi(x) \leq 0.$$

   Soit $\lambda > \frac{1}{4}$ et v, a, b comme dans 1d.
   Faisant intervenir l'intégrale $\qquad \displaystyle\int_a^b x^{1/2} v(x)(\psi''(x) + x^{-1}\psi'(x))dx,$ $\qquad$ montrer $\qquad \mu \leq \lambda.$

   (b) Déterminer

   $$\max \left\{ \inf_{x \in]0,1[} \left(-(1-x)^2 \frac{k''(x) + x^{-1}k'(x)}{k(x)} \right) ; \begin{array}{l} k \text{ de classe } C^2 \text{ sur }]0,1[\\ \text{et } \forall x \in]0,1[\quad k(x) > 0 \end{array} \right\}$$

Tournez la page S. V. P.

4. Soit D l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $\{(x,y);\ x^2+y^2<1\}$. Si f est une fonction de classe C^2 sur D , on note

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Déterminer

$$\max\left\{ \inf_{(x,y)\in D}\left(-\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \frac{\Delta f(x,y)}{f(x,y)}\right);\quad \begin{array}{l} f \text{ de classe } C^2 \text{ sur } D \\ \text{et } \forall (x,y)\in D \quad f(x,y)>0 \end{array} \right\}$$

(On rappelle que l'expression de Δ en coordonnées polaires est: $\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$).

II

1. On désigne par E l'ensemble des fonctions f de classe C^1 sur l'intervalle $]-1,1[$ vérifiant

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to -1} f(x) = 0 \qquad \text{et l'intégrale } \int_{-1}^{1} [f'(x)]^2 dx \text{ est convergente.}$$

(a) Démontrer que, si f appartient à E ,

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{-1/2} f(x) = \lim_{x\to -1}(1+x)^{-1/2} f(x) = 0.$$

(b) Montrer, pour $\epsilon \in]0,1[$,

$$\int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} f^2(x)(1-|x|)^{-2}dx = \frac{f^2(1-\epsilon)+f^2(-1+\epsilon)}{\epsilon} - 2f^2(0) \quad -2\int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} f(x)(1-|x|)^{-1}\sigma(x)f'(x)dx$$

avec $\sigma(x)=1$ si $x\geq 0$ et $\sigma(x)=-1$ si $x<0$.

(c) En déduire

$$\forall f\in E \qquad \int_{-1}^{1} f^2(x)(1-|x|)^{-2}dx \leq 4\int_{-1}^{1}[f'(x)]^2dx.$$

(d) Soit

$$\mathcal{E} = \{f\in E;\ \int_{-1}^{1} f^2(x)(1-|x|)^{-2}dx = 1\}.$$

Déterminer

$$\inf\{\int_{-1}^{1}[f'(x)]^2dx;\ f\in\mathcal{E}\}$$

(On pourra introduire les fonctions $f_\epsilon(x) = (1-r_\epsilon(x))^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ où $0<\epsilon<1$ et

$$\begin{aligned} r_\epsilon(x) &= |x| \text{ si } |x|\geq\epsilon \\ &= \frac{1}{2\epsilon}(x^2+\epsilon^2) \text{ si } |x|\leq\epsilon \text{).} \end{aligned}$$

2. Soit F l'ensemble des fonctions g de classe C^1 sur $]0,1[$ vérifiant

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 0 \qquad \text{et l'intégrale } \int_0^1 x[g'(x)]^2dx \text{ est convergente.}$$

(a) Montrer

$$\forall g\in F \qquad \int_0^1 xg^2(x)(1-x)^{-2}dx \leq 4\int_0^1 x[g'(x)]^2dx$$

(On pourra s'inspirer de la démonstration de la propriété analogue dans la question précédente).

Tournez la page S. V. P.

(b) Soit

$$\mathcal{F} = \{g \in F;\ \int_0^1 x g^2(x)(1-x)^{-2}dx = 1\}.$$

Déterminer

$$\inf\{\int_0^1 x[g'(x)]^2 dx;\ g \in \mathcal{F}\}.$$

3. Soit G l'ensemble des fonctions Φ de classe C^1 sur l'ouvert $D = \{(x,y);\ x^2+y^2 < 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\lim_{x^2+y^2 \to 1} \Phi(x,y) = 0 \text{ et } \sup_{0<R<1} \iint_{D_R} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right](x,y)\,dxdy \text{ est fini}$$

(où D_R désigne $\{(x,y);\ x^2+y^2 \le R^2\}$).
Pour une fonction $H \ge 0$ continue sur D , on pose $\iint_D H(x,y)dxdy = \sup_{0<R<1} \iint_{D_R} H(x,y)dxdy.$

(a) Montrer que pour Φ appartenant à G et $0 < R < S < 1$,

$$\int_0^{2\pi} [\Phi(S\cos t, S\sin t) - \Phi(R\cos t, R\sin t)]^2\,dt \quad \le \frac{S-R}{R} \iint_{D_{R,S}} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right](x,y)\,dxdy$$

où $D_{R,S} = \{(x,y); R^2 \le x^2+y^2 \le S^2\}$.

(b) En déduire

$$\forall \Phi \in G \qquad \lim_{R \to 1} \frac{R}{1-R} \int_0^{2\pi} \Phi^2(R\cos t, R\sin t)dt = 0.$$

(c) Montrer que, pour Φ appartenant à G ,

$$\iint_D \Phi^2(x,y)\left(1-(x^2+y^2)^{1/2}\right)^{-2} dxdy \quad \le 4 \iint_D \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right](x,y)\,dxdy.$$

(d) On pose

$$\mathcal{G} = \{\Phi \in G;\ \iint_D \Phi^2(x,y)\left(1-(x^2+y^2)^{1/2}\right)^{-2} dxdy = 1\}.$$

Déterminer

$$\inf\{\iint_D \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right](x,y)\,dxdy;\ \Phi \in \mathcal{G}\}.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail